

Laboratorio di Combinatoria

**CONFIGURAZIONI DEL CUBO DI
RUBIK**

Calcolo delle orbite e delle permutazioni

Sebastiano Ferraris

Anno Accademico 2007-2008

*Io ritengo che questo oggetto costituisca un esempio ammirevole della
bellezza rigorosa della grande ricchezza delle leggi naturali*
-Erno Rubik

Indice

1	Il Cubo di Rubik e i Gruppi	4
1.1	Descrizione del Cubo	4
1.1.1	Forma e colori	4
1.1.2	Facce	5
1.1.3	Mossa base e suddivisione in Cubetti	5
1.2	Il Gruppo di Rubik	7
1.3	Gruppi di Permutazioni e Sottogruppi del Gruppo di Rubik .	8
2	Regole di Impossibilità	12
2.1	Prima regola: orientamento degli spigoli	13
2.2	Seconda regola: orientamento degli angoli	13
2.3	Terza regola: parità delle permutazioni	13
3	Configurazioni del Cubo di Rubik	14
3.1	Configurazioni degli spigoli	14
3.2	Configurazioni degli angoli	14
3.3	Configurazioni totali	15
4	Curiosità	16
4.1	Risolvere il gioco	16
4.2	Numero minimo di mosse per risolvere il Cubo	16
4.3	Gare e campionati	16
4.4	Come cambiare orbita	17

Capitolo 1

Il Cubo di Rubik e i Gruppi

1.1 Descrizione del Cubo

1.1.1 Forma e colori

Il Cubo di Rubik , inventato dall'architetto ungherese Erno Rubik nel 1974, è il giocattolo che ha avuto più successo in assoluto, con 300.000.000 pezzi venduti dalla sua invenzione ad oggi: in media una persona su 24 ne possiede uno. L'oggetto consiste in un cubo composto da 27 **cubetti** della stessa dimensione.¹ Ogni faccia del Cubo è suddivisa in 9 **quadrati**, per un totale di 54 quadrati, di sei colori diversi: bianco, blu, rosso, verde, giallo, arancione, abbreviati rispettivamente con W, B, R, G, O, Y (è preferibile usare i nomi inglesi, per seguire la convenzione, e per non confondere il bianco con il blu). Lo scopo del gioco è quello di raggruppare su ogni lato i quadrati dello stesso colore, manovrando i blocchi di cubetti che costituiscono ogni faccia e che possono ruotare intorno al centro della faccia stessa. Per il fatto che sono possibili solo le rotazioni, il quadrato centrale, non può essere spostato; quindi al centro di ogni faccia c'è un **quadrato rappresentante** il colore di ogni faccia. Quando il cubo ha per ogni faccia quadrati dello stesso colore, allora il cubo si dice **risolto**. Un cubetto si dice **ben posizionato**, se è nella posizione in cui sarebbe se tutto il cubo fosse risolto, e si dice **ben orientato**, se ha i quadretti orientati nella posizione in cui sarebbero se il cubo fosse risolto.

¹Per avere un cubo di riferimento (senza doverne comprare uno) si può scaricare il software gratuito **Rubik** dal sito www.geometer.org/rubik . Il funzionamento del programma è spiegato in dettaglio in [3].

Fra i cubetti, 8 hanno 3 facce visibili, e sono posizionati sui vertici del Cubo; saranno indicati dalle terne con i tre colori delle tre facce: (O,Y,B), (B,Y,R), (R,Y,G), (G,Y,O), (O,B,G), (G,W,R), (R,W,B), (B,W,O). 12 cubetti hanno 2 facce visibili e sono posizionati fra i vertici, lungo gli spigoli del Cubo; saranno indicati dalle coppie (O,V), (V,R), (R,B), (B,O), (Y,O), (O,W), (W,R), (G,Y), (Y,O), (G,W), (W,B), (B,Y). I 6 quadratini posizionati al centro di ogni faccia del cubo sono i quadratini rappresentanti, sono di sei colori diversi e non possono essere spostati. Il ventisettesimo cubetto, centrale nel Cubo, non ha nessuna faccia visibile ed è infatti quello che tiene la struttura portante e che è collegato ad ogni quadratino rappresentante.

1.1.2 Facce

Possiamo individuare ogni faccia con due nomi diversi: con il colore del quadretto rappresentante della faccia in questione

$$Facce = \{W, B, R, G, O, Y\} \quad (1.1)$$

oppure con la posizione che la faccia assume quando abbiamo il Cubo in mano

$$Facce' = \{U, D, R, L, F, B\} \quad (1.2)$$

che corrispondono rispettivamente alla faccia superiore, inferiore, destra, sinistra, frontale, e quella antipodale alla frontale (Up, Down, Right, Left, Front, Back). Ovviamente il primo sistema permette di essere indipendenti dalla posizione del cubo nelle nostre mani; per questo motivo sarà usato nei primi capitoli dove si intende affrontare il cubo da un punto di vista matematico.

Per passare dal primo al secondo sistema, ovvero per fissare i colori delle facce in una ben determinata posizione, useremo la seguente convenzione: una freccia orizzontale $\rightarrow$ fra il nome del colore della faccia e la sua posizione.

Esempio 1. $W \rightarrow U, B \rightarrow F$ significa prendere il Cubo con la faccia bianca in alto e con la faccia blu frontale.

1.1.3 Mossa base e suddivisione in Cubetti

Chiamiamo **mossa base** la rotazione di ogni lato di 90° in senso orario (guardando la faccia da ruotare); le mosse base in tutto sono 6, a cui vanno aggiunte le mosse inverse ovvero le rotazioni in senso antiorario. Queste

mosse base, permettono di muovere l'insieme Γ costituito dai 20 cubetti con più di una faccia visibile.

$$\Gamma = \{(O,Y,B), (B,Y,R), (R,Y,G), (G,Y,O), (O,B,G), (G,W,R), (R,W,B), (B,W,O), (O,V), (V,R), (R,B), (B,O), (Y,O), (O,W), (W,R), (G,Y), (Y,O), (G,W), (W,B), (B,Y)\}.$$

Esiste un altro sistema², per dare un nome ai singoli cubetti dell'insieme Γ senza fare però riferimento al colore ma facendo riferimento alla posizione che occupano nel Cubo: si può chiamare ogni posizione di vertice con la successione dei nomi delle tre facce che formano il vertice in questione. Analogamente si chiama ogni posizione di spigolo con il nome delle due facce che formano lo spigolo in questione.

Esempio 2. *Dato un Cubo di Rubik, il cubetto del vertice fra le facce F , R e U , quindi in alto a destra sulla faccia frontale, avrà il nome FRU ; lo spigolo formato dalle facce F e B , quindi quello al centro, in basso sulla faccia frontale, avrà il nome di FB*

In questo modo non possiamo individuare più di un cubetto in modo univoco, però ci viene fornita la posizione del cubetto all'interno del Cubo. E' evidente che le posizioni dei cubetti, non sono assolute, ma relative al lato da cui stiamo guardando il cubo. Girando il cubo fra le mani cambiano i cubetti dei vertici e degli spigoli, ma i nomi riferiti alla posizione rimangono gli stessi. Allora, per usare questo sistema di riferimento in modo sensato, si deve anche indicare la posizione di ogni faccia. Dato che la mutua posizione delle facce è fissa basterà indicare la posizione di due sole facce contigue per definire la posizione di tutti i lati del Cubo.

Esempio 3. *Dato un Cubo risolto, con la faccia superiore bianca ($W \rightarrow U$) e la faccia frontale blu ($B \rightarrow F$), il vertice in basso a destra sulla faccia frontale sarà chiamato secondo la convenzione " FDR " il quale corrisponde al cubetto (O,Y,B) .*

In modo analogo possiamo definire ogni quadretto (faccia di ogni cubetto), dal nome della faccia su cui giace, seguito in lettere minuscole dagli altri due quadretti del cubetto, se si tratta di un angolo, o dall'altro quadretto

²Adottato in [3].

del cubetto, se si tratta di uno spigolo. In altri termini si usa la convenzione precedente con il quadretto che vogliamo indicare scritto maiuscolo:

Esempio 4. *Dato un Cubo di Rubik, il quadretto in alto a destra sulla faccia frontale sarà indicato con Fur (F = quadretto individuato sulla faccia frontale, u = contiguo al quadretto sulla faccia superiore, r = contiguo al quadretto sulla faccia di destra). Il quadretto a destra del quadretto centrale sulla faccia frontale sarà invece indicato con Ul (U = quadretto individuato sulla faccia superiore, r = contiguo alla faccia di sinistra).*

Seguendo questa convenzione, per indicare il quadretto centrale di una faccia, basta usare il nome della faccia stessa, coerentemente con quanto visto in 1.1.2.

Se la posizione iniziale non è specificata si prenderà per convenzione $O \rightarrow U$ e $R \rightarrow F$ (faccia con faccetta centrale arancione in alto e faccia con faccetta centrale rossa di fronte)

1.2 Il Gruppo di Rubik

Ogni mossa base è una funzione che va dall'insieme Γ del cubo in se stesso. Chiamiamo le sei rotazioni di ogni faccia con il nome del colore della faccia:

$$CR = \{W, B, R, G, O, Y\} \quad (1.3)$$

i cui elementi corrispondono rispettivamente alla rotazione in senso orario della faccia bianca, blu, rossa, verde, arancione e gialla. Oppure possiamo chiamare le rotazioni con il nome della posizione della faccia; CR allora diventa:

$$CR' = \{U, D, R, L, F, B\} \quad (1.4)$$

i cui elementi corrispondono rispettivamente alla rotazione in senso orario della faccia superiore, inferiore, destra, sinistra, frontale, e antipodale alla frontale. La convenzione adottata potrà creare delle confusioni fra il nome della faccia e la rotazione della stessa, ma da ciò risulteranno delle notazioni molto comode.

Le funzioni opposte sono rotazioni in senso antiorario. La composizione di quattro mosse base della stessa faccia, così come una rotazione composta con la sua inversa, restituisce il Cubo nella posizione iniziale. Una sequenza di mosse base è una composizione funzionale.

Esempio 5. La sequenza di mosse base data da

$$D \circ R \circ D^{-1} \circ R^{-1} \quad (1.5)$$

consiste nel ruotare la faccia destra in senso antiorario, la faccia inferiore in senso antiorario, la faccia destra in senso orario e per ultima la faccia inferiore in senso orario.

Osservazione 1. La struttura algebrica $(CR, \circ)$ definita come l'insieme delle mosse base $CR = \{W, B, R, G, O, Y\}$ unita alla composizione di funzione gode delle seguenti proprietà:

1. *Associativa*

$$(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z) \quad \forall X, Y, Z \in CR \quad (1.6)$$

2. *Esistenza dell'elemento neutro*

$$X \circ Y \circ Y \circ Y \circ Y = X \quad \forall X, Y \in CR \quad (1.7)$$

dato che

$$Y \circ Y \circ Y \circ Y = Id \quad (1.8)$$

dove id è la funzione identità

3. *Esistenza dell'elemento opposto*

$$X \circ X^{-1} = Id \quad \forall X \in CR \quad (1.9)$$

Definizione 1. La struttura algebrica $(CR, \circ)$ per le precedenti conclusioni è un gruppo detto **Gruppo di Rubik**.

Osservazione 2. Il Gruppo di Rubik non è abeliano; infatti $B \circ R$ dal cubo risolto sposta lo spigolo $(Y B)$ fra la faccia rossa R e la faccia blu B , invece $R \circ B$ sposta $(Y B)$ fra la faccia gialla Y e la faccia rossa R .

1.3 Gruppi di Permutazioni e Sottogruppi del Gruppo di Rubik

Ad ogni mossa base o composizione di mosse base, corrispondono delle permutazioni dei cubetti e dei quadretti del cubo. Ovviamente spigoli possono essere permutati in spigoli e gli angoli possono essere permutati in angoli; questo ci suggerisce l'esistenza di almeno due sottogruppi di permutazioni del Gruppo di Rubik.

Esempio 6. Se si effettua una rotazione della faccia frontale di un Cubo di Rubik di 90° in senso antiorario, si ottengono le seguenti permutazioni dei cubetti: $(FL UF FR DF)(ULF UFR DRF DFL)$, con struttura ciclica $2(4)$; e le seguenti permutazioni dei quadretti: $(Ruf Drf Ldf Ulf)(Rf Df Lf Uf)(Rfd Dlf Luf Urf)(Fur Fdr Fld Ful)(Fr Fd Fl Fu)$ con struttura ciclica $5(4)^3$.

Esaminiamo alcuni di questi sottogruppi del gruppo di Rubik.

1. Sottogruppo di una singola faccia: se si considerano i movimenti possibili di una sola delle sei facce, si ottiene un sottogruppo finito di ordine quattro.
2. Sottogruppo di due facce opposte: se si considerano i movimenti di due facce opposte, si ottiene un gruppo finito di ordine 16.
3. Sottogruppo di due facce adiacenti: se si considerano le posizioni possibili generate dai movimenti di due facce adiacenti, si ottiene un sottogruppo finito con 73483200 elementi [3].

Dimostrazione 1. *Restringendo l'insieme $CR = \{W, B, R, G, O, Y\}$ all'insieme costituito dalle quattro rotazioni di una stessa faccia (per esempio $\{W\}$) si ottiene $(W, \circ)$. Per dimostrare che è un sottogruppo del gruppo di Rubik, applico il criterio:*

- *Esiste l'elemento neutro (che coincide con l'elemento neutro di $(CR, \circ)$):*

$$W \circ W \circ W \circ W = Id \quad (1.10)$$

- *La composizione di due elementi del sottoinsieme appartiene ancora al sottoinsieme: infatti n rotazioni della stessa faccia appartengono ancora all'insieme delle rotazioni di quella faccia*

$$X \circ Y \in \{W\} \quad \forall X, Y \in \{W\} \quad (1.11)$$

- *Esistenza dell'elemento opposto*

$$X \circ X^{-1} = Id \quad \forall X \in \{W\} \quad (1.12)$$

³dal programma **Rubik** si ottengono le permutazioni dal menù a tendina File $\rightarrow$ Display Permutation.

Dimostrazione 2. *Restringendo l'insieme $CR = \{W, B, R, G, O, Y\}$ all'insieme costituito dalle quattro rotazioni di una stessa faccia (per esempio $\{W\}$) in unione con l'insieme costituito dalle quattro rotazioni della faccia opposta, si ottiene $(W \cup Y, \circ)$. Per dimostrare che è un sottogruppo del gruppo di Rubik, applico il criterio:*

- *Esiste l'elemento neutro (che coincide con l'elemento neutro di $(CR, \circ)$):*

$$W \circ W \circ W \circ W = Id \quad (1.13)$$

e per la faccia opposta,

$$Y \circ Y \circ Y \circ Y = Id \quad (1.14)$$

anche ogni altra composizione mista di quattro rotazioni di W e di quattro rotazioni di Y dà l'identità:

$$Y \circ Y \circ W \circ Y \circ W \circ W \circ Y \circ W = Id \quad (1.15)$$

Questo perché le due facce sono disgiunte.

- *La composizione di due elementi del sottoinsieme appartiene ancora al sottoinsieme: infatti n rotazioni della prima faccia appartengono ancora all'insieme delle rotazioni di quella faccia, e lo stesso vale per la seconda:*

$$X \circ Y \in \{W\} \quad \forall X, Y \in \{W \cup Y\} \quad (1.16)$$

- *Esistenza dell'elemento opposto*

$$X \circ X^{-1} = Id \quad \forall X \in \{W \cup Y\} \quad (1.17)$$

Dimostrazione 3. *Restringendo l'insieme $CR = \{W, B, R, G, O, Y\}$ all'insieme costituito dalle quattro rotazioni di una stessa faccia (per esempio $\{W\}$) in unione con l'insieme costituito dalle quattro rotazioni di una faccia adiacente (per esempio $\{B\}$), si ottiene $(W \cup B, \circ)$. Per dimostrare che è un sottogruppo del gruppo di Rubik, applico il criterio:*

- *Esiste l'elemento neutro (che coincide con l'elemento neutro di $(CR, \circ)$):*

$$W \circ W \circ W \circ W = Id \quad (1.18)$$

Oppure considerando solo la seconda faccia:

$$B \circ B \circ B \circ B = Id \quad (1.19)$$

Una composizione di mosse base di entrambe le facce è data da:

$$(W^{-1} \circ B^{-1} \circ W \circ B)^6 = Id \quad (1.20)$$

- La composizione di due elementi del sottoinsieme appartiene ancora al sottoinsieme: infatti n rotazioni delle due facce appartengono ancora all'insieme delle rotazioni di quelle due facce:

$$X \circ Y \in \{W\} \quad \forall X, Y \in \{W \cup B\} \quad (1.21)$$

- Esistenza dell'elemento inverso

$$X \circ X^{-1} = Id \quad \forall X \in \{W \cup B\} \quad (1.22)$$

Capitolo 2

Regole di Impossibilità

Viene spontaneo chiedersi se, con il Gruppo di Rubik, sia possibile riconfigurare i quadretti in qualsiasi posizione. Infatti le sole rotazioni dei lati di un Cubo non consentono di permutare i cubetti in tutti i posti possibili. Se si dovessero staccare le etichette colorate che contrassegnano ogni quadretto per poi riattaccarle sui quadretti in modo casuale, sarebbe molto difficile riuscire ad azzeccare una combinazione di colori tale da rendere il cubo risolvibile. Per questo scopo devono valere le seguenti condizioni:

1. Non ci devono essere due quadratini rappresentanti (i quadratini centrali di ogni faccia) dello stesso colore.
2. I cubetti sugli spigoli e sui vertici devono appartenere necessariamente all'insieme Γ

Questi vincoli, sono infatti necessari ma non sufficienti a far sì che il cubo sia risolvibile. Ci sono altre tre regole da rispettare, che riguardano l'orientamento dei quadratini di ogni cubetto. Infatti, senza staccare le etichette del Cubo, ma semplicemente smontandolo, e rimontandolo alla cieca (quindi senza rischiare di prendere cubetti al di fuori dell'insieme Γ), c'è solo una probabilità su dodici di riassembleare i pezzi in modo che il Cubo una volta rimontato sia risolvibile.¹ Questo fatto sarà dimostrato con il calcolo combinatorio nei prossimi capitoli.

¹Smontando il Cubo, ci occupiamo solo dei cubetti dell'insieme Γ perché i cubetti rappresentanti, non sono rimovibili dalla struttura centrale, e perché il cubetto centrale non è a sua volta smontabile dai cubetti rappresentanti.

2.1 Prima regola: orientamento degli spigoli

Ogni possibile permutazione dei cubetti deve essere pari, perché le mosse base delle facce generano permutazioni pari degli angoli e degli spigoli. La rotazione di un quarto di giro di una faccia è un 4-ciclo per gli spigoli più un 4-ciclo per gli angoli, ciascuna delle quali è scomponibile nella composizione di tre scambi; gli scambi degli spigoli e degli angoli danno un totale di 6 scambi dei cubetti, quindi le permutazioni sono pari. Questo significa, per quanto riguarda gli spigoli, che non c'è modo, in termini di combinazioni di mosse base, di cambiare solo l'orientamento di uno spigolo, senza spostarlo di posizione e senza cambiare orientamento e posizione di almeno un altro fra gli altri 19; in questo caso infatti si avrebbe una permutazione dispari.

2.2 Seconda regola: orientamento degli angoli

Per quanto riguarda gli angoli, analogamente a quanto succede per gli spigoli, non esistono combinazioni di mosse base che cambino l'orientamento di un solo angolo e lascino immutata la posizione e l'orientamento di almeno uno fra gli altri 19 cubetti. Infatti come nel precedente caso, si dovrebbero avere a disposizione delle permutazioni dispari.

2.3 Terza regola: parità delle permutazioni

Le sole posizioni ottenibili a partire dalla posizione standard, sono quelle in cui il numero dei cicli che agiscono sui cubi spigolo e sui cubi vertice danno una differenza pari. Per cui ci deve essere una mutua posizione iniziale ben determinata fra angoli e spigoli.

Capitolo 3

Configurazioni del Cubo di Rubik

Per calcolare quante sono le configurazioni possibili del Cubo, possiamo calcolare in quanti modi diversi possono essere piazzati i cubetti all'interno del Cubo, senza infrangere le regole di impossibilità. Dato che gli unici Cubetti smontabili sono quelli dell'insieme Γ , calcoliamo le loro combinazioni.

3.1 Configurazioni degli spigoli

Cominciamo dagli spigoli: sono in tutto 12, quindi, per il principio fondamentale del calcolo combinatorio, ci sono $12!$ modi diversi di collocare gli spigoli. Volendo tenere conto anche dell'orientamento, bisogna moltiplicare per 2^{11} il prodotto ottenuto, perché un volta piazzati 11 spigoli, il dodicesimo si troverà piazzato automaticamente. Le scelte dell'orientamento sono solo relative ai primi 11, perché, per la prima regola sull'orientamento 2.1, affinché il Cubo sia risolvibile, il dodicesimo può essere piazzato in un modo solo. Quindi le configurazioni degli spigoli sono:

$$A = (12!)2^{11} \tag{3.1}$$

3.2 Configurazioni degli angoli

Analogamente per gli otto angoli si hanno $8!$ modi diversi di piazzarli nel Cubo, ancora da moltiplicare per le possibili scelte degli orientamenti ovvero

3^7 , perché ogni angolo ha 3 facce visibili, e dopo aver scelto l'orientamento dei primi sette, l'ultimo si potrà piazzare in un unico modo, per la seconda regola sull'orientamento degli spigoli 2.2:

$$B = (8!)3^7 \quad (3.2)$$

3.3 Configurazioni totali

Il numero delle posizioni possibili non è come si può pensare $A \cdot B$. Per la terza regola sull'orientamento 2.3 infatti il prodotto $A \cdot B$ va diviso per due:

$$N = 1/2(AB) \quad (3.3)$$

$$N = (1/2)(12!)2^{11}(8!)3^7 \quad (3.4)$$

Quindi:

$$N = 43252003274489856000 \simeq 4 \cdot 10^{19} \quad (3.5)$$

Invece, se non si tiene conto delle tre regole sull'orientamento, si possono calcolare tutte le configurazioni possibili del Cubo, a partire dal Cubo smontato:

$$C = (2A)(3B) = 6(AB) \quad (3.6)$$

Ma dalla 3.3 si deduce che:

$$AB = 2N \quad (3.7)$$

$$6(AB) = 12N \quad (3.8)$$

Quindi:

$$C = 12(AB) \quad (3.9)$$

Questo significa che c'è solo $1/12$ delle posizioni possibili che possano ricondursi alla posizione standard mediante le rotazioni elementari. Quindi ci sono dodici orbite, la cui orbita principale (quella che contiene la combinazione del Cubo risolto) ha 43252003274489856000 combinazioni possibili.

Il numero delle orbite del Cubo, di Rubik quindi è 12. Questo risultato può essere dimostrato anche per via algebrica [1].

Capitolo 4

Curiosità

4.1 Risolvere il gioco

Per la risoluzione del Cubo ci sono molti metodi, e se ne cercano sempre di nuovi. Il metodo più usato per risolvere il cubo di Rubik è il cosiddetto metodo a strati che consiste nel risolvere in successione lo strato inferiore, superiore e intermedio del Cubo. Per ulteriori informazioni si rimanda a [6], [2] e [7].

4.2 Numero minimo di mosse per risolvere il Cubo

Il professore dell'università di Stanford Tomas Rokicki ha elaborato uno studio in cui dimostra che per risolvere il gioco, non servono più di 25 mosse. Usando la simmetria del Cubo, Rokicki ha ridotto le possibili configurazioni, e poi collegando in parallelo i computer della sua università ha impiegato 1500 ore per effettuare tutte le ricombinazioni possibili; questo sistema si chiama Backtracking. Nessuno ha ancora trovato un Teorema che possa dimostrare la stessa cosa senza dover calcolare fisicamente tutte le possibilità [8].

4.3 Gare e campionati

Esistono delle competizioni ufficiali, e dei campionati, dove concorrenti di tutto il mondo si sfidano per risolvere il Cubo in meno tempo possibile. In una di queste tenutasi in Spagna il 23 Febbraio del 2008, Edouard Chambon

ha superato il precedente record mondiale, risolvendo il cubo in 9.18 secondi [9].

4.4 Come cambiare orbita

Si è visto che le orbite del Cubo di Rubik sono in tutto 12, ma come si fa a passare dall'orbita principale ad un'altra? Partendo dal cubo risolto si devono smontare alcuni cubetti del Cubo e rimontarli ruotati o scambiati fra loro rispetto a come sono posizionati e orientati quando il Cubo è risolto. I modi utili di riassembleare il gioco per cambiare orbita sono seguenti:

1. ruotare solo uno spigolo qualsiasi di 90° (R_{90°);
2. ruotare solo un angolo qualsiasi di 120° (R_{120°) o di 240° (R_{240°);
3. scambiare fra loro solo due spigoli o due angoli senza ruotarli (S).

Combinando insieme queste modifiche, si ottengono le 12 orbite possibili.

o	spigolo	angolo	scambio
1	id	id	id
2	id	R_{120°	id
3	id	R_{240°	id
4	id	id	S
5	id	R_{120°	S
6	id	R_{240°	S
7	R_{90°	id	id
8	R_{90°	R_{120°	id
9	R_{90°	R_{240°	id
10	R_{90°	id	S
11	R_{90°	R_{120°	S
12	R_{90°	R_{240°	S

Se nello stesso cubo si cambia l'orientamento di due spigoli, o di un numero pari di spigoli, si torna all'orbita principale. Ruotare due angoli di 120° , conduce alla stessa orbita che si otterrebbe ruotando un solo angolo di 240° . Scambiare fra loro due spigoli senza ruotarli conduce alla stessa orbita che si otterrebbe se si scambiassero due angoli senza ruotarli.

Bibliografia

- [1] Laura Mo, *Il Cubo di Rubik*, Tesi di laurea, università degli studi di Torino, scienze MFN 2005-06.
- [2] Andre Warusfel, *Il Cubo di Rubik*, Oscar Mondadori 1982.
- [3] Tom Davis, *Group Theory via Rubik's Cube*,
www.geometer.org/rubik/group.pdf December 2006.
- [4] Luciana Picco Botta, *Appunti di Algebra I*, Quaderni didattici, 2006.
- [5] Margherita Roggero, *Appunti ed esercizi di Matematica Discreta*,
Quaderni didattici 2005/2006.
- [6] <http://www.rubiksillusions.com>
- [7] <http://it.youtube.com/watch?v=HsQIoPyfQzM>
- [8] <http://ilfiltro.blogspot.com/2008/03/esiste-una-soluzione-al-cubo-di-rubik.html>
- [9] <http://www.worldcubeassociation.org/results/c.php?i=MurciaOpen2008>